ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE
CONCOURS DE RECRUTEMENT
DES INGÉNIEURS DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION
DE L 'AVIATION CIVILE
ET DES INGÉNIEURS TITULAIRES
1974

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Un corrigé

-I-

1. On remarque que, pour tout $\theta \in [0, \pi]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - 2x\cos(\theta) + x^2 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$ puis

$$\frac{1}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} = \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(\frac{1}{x - e^{i\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}}\right)$$

Cette décomposition en éléments simples montre que $R = 1$ ($|e^{i\theta}| = |e^{-i\theta}| = 1$).
En écrivant que $\dfrac{1}{x - e^{i\theta}} = -\dfrac{e^{-i\theta}}{1 - e^{-i\theta}x}$, on montre que ce terme est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
On procède de même pour $\dfrac{1}{x - e^{-i\theta}}$. On obtient finalement que

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} &= \frac{1}{2i\sin(\theta)}\left(-e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta}x^n + e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{int}x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}x^n\end{aligned}$$

On a donc montré que f_t est est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et explicité son développement avec $Q_n(\theta) = P_n(t) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\sin((n+1)\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

2. Si $x \in]-1, 1[$ les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n \cos n\theta$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n \sin n\theta$ sont absolument convergentes, donc convergentes et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos n\theta + i\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(xe^{i\theta}\right)^n = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}$$

Mais

$$\frac{1}{1 - xe^{i\theta}} = \frac{1 - xe^{-i\theta}}{|1 - xe^{i\theta}|^2} = \frac{1 - x\cos\theta + ix\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

D'où, par comparaison des parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos n\theta = \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\theta = \frac{x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

La deuxième égalité s'écrit aussi, pour $x \neq 0$ et $0 < \theta < \pi$, sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

où encore $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{1-2x\cos\theta + x^2}$. On trouve une autre fois $Q_n(\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

3. On a $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta$, ce qui donne

$$(*) \quad P_n(t) = P_{n-1}(t)\cos\theta + \cos n\theta$$

Cette égalité permet de déduire par récurrence que $\forall t \in]-1,1[$, $|P_n(t)| \leq n+1$. En effet, pour $n=0$, $P_0(t) = 1$ et la propriété est donc vraie pour $n = 0$. L'égalité précédente entraîne $|P_n(t)| \leq |P_{n-1}(t)| + 1 \leq n+1$ et on conclut par le principe de récurrence.
Pour la valeur de $P(1)$, on a :

$$P_n(1) = \lim_{t\to 1} P_n(t) = \lim_{\theta\to 0} Q_n(\theta) = (n+1)\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)\theta}}{\frac{\sin\theta}{\theta}} = (n+1).$$

On peut vérifier que $P_1(t) = 2t$, donc $P_1(-1) = -2$. Supposons que $P_{n-1}(-1) = (-1)^{n-1}n$. L'égalité $(*)$ s'écrit pour $t=-1$, $P_n(-1) = P_{n-1}(1)\cos\pi + \cos n\pi = -1\times(-1)^{n-1}n + (-1)^n = (-1)^n(n+1)$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; P_n(-1) = (-1)^n(n+1).$$

Pour $\theta \in]0,\pi[$ on voit que $P_n(t) = 0$ est équivalent à $Q_n(\theta) = 0$ ou encore $\sin((n+1)\theta) = 0$. C'est donc le cas si $\theta \in \left\{ \dfrac{k\pi}{n+1} \;\middle|\; 1 \leq k \leq n \right\}$. P_n s'annule donc pour les valeurs

$$x_k^{(n)} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \; 1 \leq k \leq n$$

$\cos$ étant bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$, les $x_k^{(n)}$ sont deux à deux distincts. Ce sont n racines de P_n comprises entre -1 et 1.
La fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et $\dfrac{k\pi}{n+1} < \dfrac{(k+1)\pi}{n+1}$, donc $x_{k+1}^{(n)} < x_k^{(n)}$ et par conséquent :

$$-1 < x_n^{(n)} < \ldots < x_{k+1}^{(n)} < x_k^{(n)} < x_{k-1}^{(n)} < \ldots < x_1^{(n)} < -1.$$

Le polynôme P_{n-1} s'annule pour les $x_k^{(n-1)}$, $k \in [\![1, n-1]\!]$. Montrons que

$$-1 < x_n^{(n)} < \ldots < x_{k+1}^{(n)} < x_k^{(n-1)} < x_k^{(n)} < x_{k-1}^{(n-1)} < x_{k-1}^{(n)} < \ldots < x_1^{(n)} < -1.$$

On a $\dfrac{k\pi}{n+1} < \dfrac{k\pi}{n-1} < \dfrac{(k+1)\pi}{n+1}$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$, donc $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) > \cos\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right) > \cos\left(\dfrac{(k+1)\pi}{n+1}\right)$, d'où :

$$x_{k+1}^{(n)} < x_k^{(n-1)} < x_k^{(n)}.$$

En conclusion, entre deux racines consécutives de P_n il y a une racine de P_{n-1}.

4. On a $\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \complement_{n+1}^k \sin^k\theta\cos^{n+1-k}\theta$. D'où :

$$\sin(n+1)\theta = \sum_{0\leq j\leq \frac{n-1}{2}} \complement_{n+1}^{2j+1}\sin^{2j+1}\theta\cos^{n+1-2j-1}\theta$$

Ainsi,

$$P_n(t) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \sum_{0\le j\le \frac{n-1}{2}} \complement_{n+1}^{2j+1} \sin^{2j}\theta\cos^{n+1-2j-1}\theta$$

$$= \sum_{0\le j\le \frac{n-1}{2}} \complement_{n+1}^{2j+1} t^{n-2j}(1-t^2)^j$$

Donc P_n est un polynôme en t. Le coefficient dominant a_n de P_n est donné par :

$$a_n = \sum_{0\le j\le \frac{n-1}{2}} \complement_{n+1}^{2j+1} = \sum_{k \text{ impair}} \complement_{n+1}^{k} = \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n,$$

donc on peut déduire que P_n est un polynôme de degré n.

Pour $t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+2xt+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(-t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n P_n(t)$. Donc par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière, on en déduit que :

$$\forall t\in]-1,1[,\ \ P_n(t) = (-1)^n P_n(t)$$

Donc si n est pair, P_n est pair et si n est impair P_n est impair. Donc n et P_n sont de même parité.

5. Soit $t\in]-1,1[$ fixé. f_t est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ comme fonction définie par une série entière de rayon de convergence égal à 1. D'où la possibilité de dériver terme à terme la série :

$$\frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}x}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} P_n(t)$$

et donc

$$\begin{aligned}(1-2xt+x^2)\frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}x}(x) &= (1-2xt+x^2)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}P_n(t)\\ &= P_1(t)+2(P_2(t)-tP_1(t))x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+(n-1)P_{n-1}(t)\right]x^n.\end{aligned}$$

Mais

$$(1-2xt+x^2)\frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{2t-2x}{1-2xt+x^2} = (2t-2x)f_t(x) = 2tP_0(t)+2\left(tP_1(t)-P_0(t)\right)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[2(tP_n(t)-P_{n-1}(t)\right]x^n$$

D'où :

$$\begin{cases} 2tP_0(t) = P_1(t)\\ 2(P_2(t)-tP_1(t)) = 2(tP_1(t)-P_0(t))\\ (n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+(n-1)P_{n-1}(t) = 2tP_n(t)-2P_{n-1}(t),\ \ \forall n\ge 2\end{cases}$$

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(t)-2tP_n(t)+P_{n-1}(t)=0$ avec $P_0(t)=t$ et $P_1(t)=2t$.

La relation $\sin(n+2)\theta+\sin n\theta = 2\cos\theta\sin(n+1)\theta$ conduit à la relation :

$$\frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

ce qui montre que $P_{n+1}(t)+P_{n-1}(t) = 2tP_n(t)$.

-II-

1. La fonction g_n définie sur $]0,\pi[$ par $g_n(\theta) = P_n(t)\sin\theta = \sin(n+1)\theta$ vérifie $g_n''(\theta)+(n+1)^2 g_n(\theta) = 0$. Calculons donc $g_n''(\theta)$. On a :

$$\begin{aligned} g_n'(\theta) &= P_n'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} \times \sin\theta + P_n(t)\cos\theta \\ &= -P_n'(t)\sin^2\theta + P_n(t)\cos\theta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_n''(\theta) &= -P_n''(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} \times \sin^2\theta + P_n'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} \times \cos\theta - P_n(t)\cos\theta\sin\theta \\ &= P_n''(t)\sin^3\theta - 3P_n'(t)\sin\theta\cos\theta - P_n(t)\sin\theta. \end{aligned}$$

Donc l'équation $g_n''(\theta) + (n+1)^2 g_n(\theta) = 0$ conduit à l'équation :

$$\sin\theta\left[(1-\cos^2\theta)P_n''(t) - 3\cos\theta P_n'(t) - P_n(t) + (n+1)^2 P_n(t)\right] = 0.$$

D'où,

$$\forall t \in]-1,1[,\quad (1-t^2)P_n''(t) - 3tP_n'(t) + n(n+2)P_n(t) = 0.$$

Donc P_n est solution de l'équation différentielle $(1-t^2)y_n'' - 3ty_n' = -n(n+2)y$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

2. On pose $z = y(\cos\theta)$. Supposons y solution de l'équation différentielle $E_n(t)$. On a :

$$z'(\theta) = -y'(\cos\theta)\sin\theta$$

et

$$z''(\theta) = y''(\cos\theta)\sin^2\theta - y'(\cos\theta)\cos\theta.$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sin\theta z''(\cos\theta) &= \sin\theta\left[(1-\cos^2\theta)y''(\cos\theta) - \cos\theta y'(\cos\theta)\right] \\ &= \sin\theta\left[2\cos\theta y'(\cos\theta) - n(n+2)y(\cos\theta)\right] \\ &= -2\cos\theta\sin\theta y'(\cos\theta) - n(n+1)\sin\theta y(\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta z'(\cos\theta) - n(n+1)\sin\theta z(\theta) \end{aligned}$$

Finalement, z est solution de l'équation différentielle linéaire de second degré en θ :

$$E_n(\theta):\quad \sin\theta y'' - 2\cos\theta y' + n(n+1)\sin\theta y = 0.$$

On peut vérifier facilement que la fonction $Q_n : \theta \mapsto \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ est solution de l'équation différentielle $E_n(\theta)$ sur l'intervalle $]0,\pi[$.

3. D'après la remarque faite dans la première question de cette partie, $h = z\cos\theta$ est solution de l'équation différentielle en θ :

$$H_n(\theta):\quad y'' + (n+1)^2 y = 0.$$

4. On connait les solutions de l'équation différentielle $H_n(\theta)$, ce sont les fonctions de la forme

$$h : \theta :\mapsto \alpha\cos(n+1)\theta + \beta\sin(n+1)\theta$$

où α et β sont des constantes réelles, donc les solutions de $E_n(\theta)$ sont de la forme

$$z : \theta :\mapsto \alpha\frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta} + \beta\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Enfin les solutions de $E_n(t)$ sont de la forme :

$$y : t \mapsto \alpha \mapsto \alpha\frac{\cos\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sin(\arccos t)} + \beta\frac{\sin\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sin(\arccos t)} = \alpha\frac{\cos\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sqrt{1-t^2}} + \beta\frac{\sin\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sqrt{1-t^2}}.$$

On obtient Q_n avec la fonction z où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, et donc $P_n(t) = \dfrac{\sin\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sqrt{1-t^2}}$ pour tout $t \in]-1,1[$.

5. D'après le cours, l'espace de solutions de l'équation différentielle $E_n(t)$ est espace vectoriel de dimension 2.

Soit $y = \sum_{p=0}^{\infty} a_p t^p$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On a alors, par dérivation terme à terme, pour tout $x \in]-R, R[$, $y' = \sum_{p=1}^{\infty} p a_p t^{p-1}$ et $y'' = \sum_{p=2}^{\infty} p(p-1) a_p t^{p-1}$. On en déduit que que y est solution de l'équation différentielle $E_n(t)$ si, et seulement si,

$$2a_2 + n(n+2)a_0 + 6a_3 - [n(n+2)-3]\, a_1 + \sum_{p=2}^{\infty} [(p+2)(p+1)a_{p+2} - (p(p+2) - n(n+2))]\, a_p t^p = 0.$$

et donc, par unicité du développement en série entière, si et seulement si

$$\begin{cases} 2a_2 + n(n+2)a_0 = 0 \\ 6a_3 - 3a_1 + n(n+3)a_1 = 0 \\ (p+2)(p+1)a_{p+2} - [p(p+2) - n(n+2)]\, a_p = 0, \ \ \forall p \geq 2. \end{cases}$$

Le système est équivalent à $a_{p+2} = \dfrac{p(p+2) - n(n+2)}{(p+2)(p+1)} a_p = -\dfrac{(n-p)(p+n+2)}{(p+2)(p+1)} a_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \ \ y(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^{2k+1}.$$

Les α_k et β_k sont données par les relations suivantes :

$$\alpha_{k+1} = -\frac{(n-2k)(2k+n+2)}{2(k+1)(2k+1)} \alpha_k, \ \ \alpha_0 = 1$$

et

$$\beta_{k+1} = -\frac{(n-2k-1)(2k+n+3)}{2(k+1)(2k+3)} \beta_k, \ \ \beta_0 = 1.$$

• Si $n = 2s+1$ est impair, alors $n(n+2)$ est impair et donc $\alpha_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = 1$, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k t^{2k}$ est 1. Dans la suite nous désignons par S la fonction ainsi dénie sur $]-1, 1[$, c'est une solution non nulle de $E_n(t)$ et elle est paire

D'autre part, $\beta_{s+1} = 0$ et donc les β_k sont nuls à partir d'un certain rang, donc la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^{2k+1}$ est une fonction polynomiale impaire.

Comme P_n est une fonction impaire et solution de $E_n(t)$, il est facile de voir que S et P_n sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions de (E_n). Les solutions de $E_n(t)$ sont donc toutes les combinaisons linéaires de S et de P_n.

• Si $n = 2s$ est pair, alors $n(n+2)$ est pair et donc $\beta_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = 1$, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k t^{2k}$ est 1. Dans la suite nous désignons par S la fonction ainsi dénie sur $]-1, 1[$, c'est une solution non nulle de $E_n(t)$ et elle est impaire

D'autre part, $\alpha_{s+1} = 0$ et donc les α_k sont nuls à partir d'un certain rang, donc la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^{2k+1}$ est une fonction polynomiale paire.

Comme P_n est une fonction paire et solution de $E_n(t)$, il est facile de voir que S et P_n sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions de (E_n). Les solutions de $E_n(t)$ sont donc toutes les combinaisons linéaires de S et de P_n.

Le polynôme P_{2s-1} est défini par $\sum_{k=0}^{s} \beta_k t^{2k-1}$ avec $\beta_{k+1} = -\dfrac{(n-2k-1)(2k+n+3)}{2(k+1)(2k+3)}\beta_k$ et $\beta_0 = 1$, ce qui donne :

$$\beta_k = (-1)^k \prod_{l=1}^{k} \frac{(n-2l-1)(2l+n+3)}{2(l+1)(2l+3)}.$$

Le polynôme P_{2s} est défini par $\sum_{k=0}^{s} \alpha_k t^{2k}$ avec $\alpha_{k+1} = -\dfrac{(n-2k)(2k+n+2)}{2(k+1)(2k+1)}\alpha_k$ et $\alpha_0 = 1$, ce qui donne :

$$\alpha_k = (-1)^k \prod_{l=1}^{k} \frac{(n-2l)(2l+n+2)}{2(l+1)(2l+1)}.$$

-III-

1. Soient n et m deux entiers naturels. Utilisons le changement de variable $t = \cos\theta$ pour $\theta \in [0, \pi]$, on a donc $\mathrm{d}t = -\sin\theta \mathrm{d}\theta$ ou encore $\mathrm{d}\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ car $\sin\theta \geq 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$. On obtient

$$\begin{aligned}
I_{n,m} &= \frac{2}{\pi}\int_{1}^{-1} P_n(t)P_m(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t && (1)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)(-\mathrm{d}\theta) && (2)\\
&= 2\pi\int_{0}^{\pi} \sin((n+1)\theta)\sin((m+1)\theta)\mathrm{d}\theta && (3)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\cos((n-m)\theta) - \cos((n+m+2)\theta))\mathrm{d}\theta && (4)
\end{aligned}$$

Ainsi,
- si $n \neq m$, $I_{n,m} = 0$,
- si $n = m \neq 0$, $I_{n,m} = 1$,
- si $n = m = 0$, $I_{n,m} = 2$.

2.

$$\begin{aligned}
\int [m(m+2-n(n+2))]\, y_n y_m \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t &= \int m(m+2) y_n y_m \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t - \int n(n+2) y_n y_m \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\\
&= \int \left[(1-t^2)y_n'' - 3ty_n'\right] y_m \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\\
&\quad - \int \left[(1-t^2)y_m'' - 3ty_m'\right] y_n \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\\
&= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} y_n'\right] y_m \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} y_m'\right] y_n \mathrm{d}t\\
&= \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} y_n' y_m - \int \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} y_n' y_m' \mathrm{d}t - \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} y_m' y_n\\
&\quad + \int \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} y_m' y_n' \mathrm{d}t\\
&= \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} \left(y_n' y_m - y_n y_m'\right)
\end{aligned}$$

3. D'après la deuxième partie, y_n est de la forme $\alpha_n \dfrac{\cos\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sqrt{1-t^2}} + \beta_n \dfrac{\sin\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sqrt{1-t^2}}$ et y_m est de la forme $\alpha_m \dfrac{\cos\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sqrt{1-t^2}} + \beta_m \dfrac{\sin\left[(n+1)\arccos t\right]}{\sqrt{1-t^2}}$, donc $\lim\limits_{|t|\to 1} \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}\, y_n(t) y_m(t) = \alpha_n \alpha_m$, donc

$\sqrt{1-t^2}y_n(t)y_m(t) \underset{|t|\to 1}{\sim} \dfrac{\alpha_n\alpha_m}{\sqrt{1-t^2}}$, donc par comparaison, la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}y_n(t)y_m(t)$ est intégrable sur $]-1,1[$.
D'après la question précédente, et pour $n \neq m$, on a :

$$\int_{-1}^{1} \left[-n(n+2)+m(m+2)\right] y_n(t)y_m(t)\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(y_n'(t)y_m(t)-y_n(t)y_m'(t)\right)\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Ainsi, $J_{n,m}=0$ si $n \neq m$.

-IV-

1. $U_n'(t) = c\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}(-2t)$, d'où $(1-t^2)U_n'(t)+(2n+1)tU_n(t)=0$. Donc U_n est solution de l'équation différentielle $(1-t^2)y'+(2n+1)y=0$ sur l'intervalle $]-1,1[$.
2. Dérivons $(n+1)$ fois l'égalité $(1-t^2)U_n'(t)+(2n+1)tU_n(t)=0$ pour $t\in]-1,1[$, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\left[(1-t^2)U_n'(t)\right]+(2n+1)\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\left[tU_n(t)\right]\\
&= \mathtt{C}_{n+1}^0(1-t^2)U_n^{(n+2)}(t)+\mathtt{C}_{n+1}^1(-2t)U_n^{(n+1)}(t)+\mathtt{C}_{n+1}^2(-2)U_n^{(n)}(t)+(2n+1)\mathtt{C}_{n+1}^0 tU_n^{(n+1)}(t)\\
&\quad +(2n+1)\mathtt{C}_{n+1}^1)U_n^{(n)}(t)\\
&= (1-t^2)V_n''(t)-2(n+1)tV_n'(t)-n(n+1)V_n(t)+(2n+1)tV_n'(t)+(2n+1)(n+1)V_n(t)\\
&= (1-t^2)V_n''(t)-tV_n'(t)+(n+1)^2V_n(t)
\end{aligned}$$

Donc V_n est solution de l'équation différentielle $(1-t^2)y''-ty'+(n+1)^2y=0$ sur l'intervalle $]-1,1[$.
3. On a $V_n(t)=(1-t^2)^{\frac{1}{2}}W_n(t)$, d'où pour tout $t\in]-1,1[$:

$$V_n'(t) = -t(1-t^2)^{\frac{-1}{2}}W_n(t)+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}W_n'(t)$$

et

$$V_n''(t) = -(1-t^2)^{\frac{-1}{2}}W_n(t)-t^2(1-t^2)^{\frac{-3}{2}}W_n(t)-2t(1-t^2)^{\frac{-1}{2}}W_n'(t)+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}W_n''(t).$$

En remplaçant dans l'équation différentielle de la question précédente, on obtient la relation :

$$\forall t\in]-1,1[,\ \ (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left[(1-t^2)W_n''(t)-3tW_n'(t)+n(n+2)W_n(t)\right]=0$$

et par conséquent W_n est solution de l'équation différentielle $E_n(t)$ sur l'intervalle $]-1,1[$.
Vérifions que W_n est une fonction polynômiale en t. En effet, on remarque d'abord que

$$(1-t^2)^{n+\frac{1}{2}} = (1-t)^{n+\frac{1}{2}}\times(1-t)^{n+\frac{1}{2}},$$

donc en utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1-t^2)^{\frac{-1}{2}}V_n(t) &= (1-t^2)^{\frac{-1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[(1-t^2)^{n+\frac{1}{2}}\times(1-t^2)^{n+\frac{1}{2}}\right]\\
&= (1-t^2)^{\frac{-1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\mathtt{C}_n^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(1-t)^{n+\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}t^{n-k}}(1+t)^{n+\frac{1}{2}}\\
&= (1-t^2)^{\frac{-1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}(1-t)^{n+\frac{1}{2}-k}(1+t)^{\frac{1}{2}+k}\\
&= (1-t^2)^{\frac{-1}{2}}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}(1-t)^{n-k}(1+t)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}(1-t)^{n-k}(1+t)^k
\end{aligned}$$

où les $\alpha_{n,k}$ sont des nombres réels. Donc on voit bien qu'il s'agit d'un polynôme en t. Comme P_n est solution de l'équation différentielle de $E_n(t)$, alors W_n et P_n sont proportionnelle, donc il existe une constante c telle que

$$\forall t \in]-1,1[, \quad P_n(t) = c(1-t^2)^{\frac{-1}{2}} V_n(t).$$

4. D'après les calculs de la question précédente, le coefficient dominant de $(1-t^2)^{\frac{-1}{2}} V_n(t)$ est donné par :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}(-1)^{n-k}$$

Mais on sait que le coefficient dominant de P_n est 2^n, donc $2^n = c\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}(-1)^{n-k}$ et donc

$$c = \frac{2^n}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}(-1)^{n-k}}.$$

••••••••••